ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ιούνιος 2014

<u>**ΠΡΟΣΟΧΗ:**</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

<u>**Θέμα**</u> **1** : Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και ότι στον πίνακα τιμών της

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	3	0	-1	1	3

υπάρχει ένα απομονωμένο σφάλμα. Να βρεθεί το σφάλμα χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές, να διορθωθεί ο πίνακας τιμών και να βρεθεί η f με παρεμβολή.

<u>**Θέμα**</u> **2** : Δοθέντος ότι η συνάρτηση f, που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

x_i	0	1	2	4	6
f_i	0	5	0	-16	0

είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων $\int_0^6 f(x)dx$ και $\int_4^6 f(x)dx$, χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, χωρίς να βρεθεί η f.

<u>**Θέμα**</u> **3** : Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 + 4x - 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι αυτή έχει μια μοναδική ρίζα ξ που βρίσκεται στο διάστημα $[0,1]$. Για την εύρεση της ρίζας αυτής προτείνεται ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(1 - x_n^3\right) \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμος πληρεί το κριτήριο σύγκλισης στο διάστημα $[0,1]$ και να βρεθεί το κατάλληλο x_0 για το οποίο όλες οι επαναλήψεις θα βρίσκονται στο διάστημα $[0,1]$.

<u>**Θέμα**</u> **4** : Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)

ΘΕΜΑ 1ο

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ

Να βρεθεί η συνάρτηση f, εάν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου 1 και δίνεται απο τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x_i	-1	0	2
f_i	3	1	3

(ΟΜΟΙΑ ΛΥΝΕΤΑΙ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΜΑ ΦΕΥΡΟΥΑΡΙΟΥ)

ΛΥΣΗ

Α' Τροπος

Μέσω Lagrange:

$$P(x) = f(x_0)\cdot L_0(x) + f(x_1)\, L_1(x) + f(x_2)\cdot L_2(x) \quad , \; 3^{\text{ο}} \text{ βαθμού}$$

$$P(x) = f(x_0)\cdot\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P(x) = 3\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)\cdot(-1-2)} + 1\cdot\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(0+1)\cdot(0-2)} + 3\cdot\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}$$

$$P(x) = \cancel{3}\cdot\frac{x^2-2x}{\cancel{3}} + \frac{x^2-x-2}{-2} + \cancel{3}\cdot\frac{x^2+x}{\cancel{6}}$$

$$P(x) = x^2 - 2x - \cancel{\tfrac{1}{2}x^2} + \frac{1}{2}x + 1 + \cancel{\tfrac{1}{2}x^2} + \frac{1}{2}x$$

$$P(x) = x^2 - x + 1$$

Έπειτα, $f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\phi(x)\, f^{(n+1)}(\xi)$, $\xi\in(-1,2)$ με $\phi(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{(2+1)!}\cdot(x+1)\cdot x\cdot(x-2)\cdot f'''(\xi) =$$

Διότι f 3ου βαθμού πολυων. και μεγιστοβαθμιο το 1 άρα $(x^3)''' = 6 = 3!$

$$= x^2 - x + 1 + \frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!}}\cdot(x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x) =$$

$$= \cancel{x^2} - x + 1 + x^3 - \cancel{x^2} - 2x =$$

$$= x^3 - 3x + 1 \; .$$

Β' τροπος (μεσω πολυωνύμου παρεμβολής)

- $\Delta^0(x_i)(f) = f(x_i)$
- $\Delta^1(x_i,x_{i+1})(f) = \dfrac{\Delta^0(x_{i+1})-\Delta^0(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$
- $\Delta^2(x_i,x_{i+1}x_{i+2})(f) = \dfrac{\Delta'(x_{i+1},x_{i+2})-\Delta'(x_i,x_{i+1})}{x_{i+2}-x_i}$

Διαιρεμένες διαφορές Newton

ΘΕΜΑ 2ο

ΙΟΥΝΙΟΣ

Δοθέντος ότι η συνάρτηση f, που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

x_i	0	1	2	4	6
f_i	0	5	0	-16	0

Είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων: $\int_0^6 f(x)dx$ και $\int_4^6 f(x)dx$ χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης δίχως να βρεθεί η f.

ΛΥΣΗ

Τα σημεία 3 και 5 παραλείπονται:

Άρα: $$\int_0^6 f(x)dx = \underbrace{\int_0^2 f(x)dx}_{\text{Simpson } h=1} + \underbrace{\int_2^6 f(x)dx}_{\text{Simpson } h=2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(f(0)+4f(1)+f(2)\right) + \frac{2}{3}\cdot\left(f(2)+4f(4)+f(6)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(0+4\cdot5+0\right) + \frac{2}{3}\cdot\left(0+4\cdot(-16)+0\right) =$$

$$= \frac{20}{3} - \frac{128}{3} = -\frac{108}{3} = -36.$$

και το επόμενο

$$\int_4^6 f(x)dx = \int_4^0 f(x)dx + \int_0^6 f(x)dx = \int_0^6 f(x)dx - \underbrace{\int_0^4 f(x)dx}_{\text{SIMPSON } h=2} =$$

$$= -36 - \frac{2}{3}\left(f(0)+4f(2)+f(4)\right) =$$

$$= -36 - \frac{2}{3}\left(0+0+(-16)\right) = -36 + \frac{32}{3} = \frac{-108+32}{3} =$$

$$= -\frac{76}{3}.$$

Παρατήρηση το 1ο ολοκλήρωμα υπολογίζεται και με κανόνα $\frac{3}{8}$ με βήμα $h=2$

ΘΕΜΑ 3ο:

ΙΟΥΝΙΟΣ

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 + 4x - 1 = 0$.
ΝΔΟ η $f(x)=0$ έχει μια μοναδική ρίζα ξ στο $\Delta[0,1]$
Για την εύρεση αυτής της ρίζας προτείνεται ο παρακάτω αλγόριθμος:
$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - x_n^3), \quad n = 0,1,2 \ldots$$
ΝΔΟ ο αλγόριθμος αυτός πληρεί το κριτήριο σύγκλισης στο $\Delta[0,1]$, καθώς να βρεθεί το κατάλληλο x_0 για το οποίο όλες οι επαναλήψεις θα ανήκουν στο $\Delta[0,1]$

ΛΥΣΗ

- $f \in C([0,1])$
- $\left\{ \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 4 > 0 \end{array} \right.$

$\xrightarrow{\text{Θετ}} \exists \xi \in (0,1) : f(\xi) = 0$

- $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0 \Rightarrow f \uparrow : [0,1]$

$\Rightarrow \exists$ ακριβώς ένα $\xi \in (0,1) : f(\xi) = 0$.

Έπειτα, εξετάζουμε εάν ισχύει το Θ. συστολής $\forall x_0 \in [0,1]$.

$x_{n+1} = \varphi(x_n) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Έστω, $\varphi(x) = \frac{1}{4}(1 - x^3)$, $\forall x \in [0,1]$.

$\varphi'(x) = \frac{1}{4} 3 \cdot x^2 = -\frac{3}{4} \cdot x^2 \leq 0 \Rightarrow \varphi \downarrow : [0,1]$. (με 0 ρίζα)

$\varphi([0,1]) = [\varphi(1), \varphi(0)] = [0, \frac{1}{4}] \subseteq [0,1]$ καλώς ορισμένη

$L = \max_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| = \frac{3}{4} \max_{x \in [0,1]} |x^2| = 0 < 1$ συστολή

ΘΕΜΑ 4ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2014)

Να λυθεί το σύστημα $Ax=b$ με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση, εάν

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την περιγραφή της μεθόδου θα πρέπει να αντάλλαξουμε την 1η με την 2η γραμμή αφού $|2|>|1|$

Άρα, χρησιμοποιούμε τον μεταθετικό πίνακα

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ώστε} \quad \underline{P_1\cdot Ax = P_1\cdot b}$$

Επομένως,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Τότε, έχουμε ως πίνακα πολλαπλασιαστών τον

$$L_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ώστε} \quad \underline{L_1\cdot P_1\cdot Ax = L_1\cdot P_1\cdot b}$$

Ισοδύναμα, έχουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 7/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

στο επόμενο βήμα το max της επόμενης στήλης είναι το 1

Άρα, $P_2 = I_4$ (δεν αλλάζουμε γραμμές), $\underline{P_2 L_1 P_1 Ax = P_2 L_1 P_1 b}$

Επομένως,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 7/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

τότε, έχουμε πίνακα πολλ/στών:

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ώστε } \underline{L_2 P_2 L_1 P_1 \cdot Ax = L_2 P_2 L_1 P_1 \cdot b}$$

ισοδύναμα έχουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

στο επόμενο και τελευταίο βήμα

$|\frac{1}{2}| < |2|$ άρα εναλλάσσουμε τις γραμμές 3 και 4

με τη χρήση του μεταθετικού πίνακα:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ώστε } \underline{P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 \cdot b}$$

Επομένως,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

τότε, έχουμε τον πίνακα πολλ/στών

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \text{ ώστε } \underline{L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 \cdot A = L_3 P_3 L_2 P_2 \cdot L_1 P_1 \cdot b}$$

ισοδύναμα, έχουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 \\ 2x_3 + 3x_4 = -1 \Rightarrow x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$